

**METHOD FOR DESIGNING BLADE SHAPE OF TURBO MACHINE**

Patent Number: JP10149384  
Publication date: 1998-06-02  
Inventor(s): HORIBATA YASUYOSHI; NIIZEKI YOSHIKI  
Applicant(s): TOSHIBA CORP  
Requested Patent: ☐ JP10149384  
Application: JP199603 ☐ 0337 19961115  
Priority Number(s):  
IPC Classification: G06F17/50 ; F01D5/1 ☐ ; G06F17/12  
EC Classification:  
Equivalents:

---

**Abstract**

---

**PROBLEM TO BE SOLVED:** To provide a design method capable of executing optimization by realistic calculation time and cost even in the case of a blade shape defined by many design variables and having the high degree of freedom.

**SOLUTION:** A grating coordinate operation part ☐ generates grating coordinates corresponding to an applied initial shape and a sequential analysis operation part 5 solves a flow field with the use of a sequential analysis procedure based on a compressive/viscous fluid equation. Then an objective function gradient operation part 7 finds out the gradient of an objective function by solving a simultaneous linear equation with the use of an implicit function theorem. An optimizing operation part 6 finds out the direction and quantity of shape correction capable of most efficiently reducing the objective function with the use of a numerical optimization procedure and corrects the blade shape. These operations are repeated for the sequentially updated blade shape until the objective function is minimized or a result satisfying the specification of the design is obtained.

---

Data supplied from the esp@cenet database - 12

**THIS PAGE BLANK (USPTO)**

(19)日本国特許庁 (J P)

(12) 公開特許公報 (A)

(11)特許出願公開番号

特開平10-149384

(43)公開日 平成10年(1998) 6月2日

(51)Int.Cl.<sup>6</sup>

識別記号

F I

G 0 6 F 17/50

G 0 6 F 15/60

6 8 0 Z

F 0 1 D 5/14

F 0 1 D 5/14

G 0 6 F 17/12

G 0 6 F 15/324

15/60

6 2 0 E

審査請求 未請求 請求項の数17 書面 (全 19 頁)

(21)出願番号 特願平8-340337

(22)出願日 平成8年(1996)11月15日

特許法第30条第1項適用申請有り 1996年5月15日 社団法人日本ガスタービン学会発行の「第24回ガスタービン定期講演会講演論文集」に発表

(71)出願人 000003078

株式会社東芝

神奈川県川崎市幸区堀川町72番地

(72)発明者 堀端 康善

神奈川県川崎市幸区小向東芝町1 株式会社東芝研究開発センター内

(72)発明者 新関 良樹

神奈川県横浜市鶴見区末広町2丁目4番地 株式会社東芝京浜事業所内

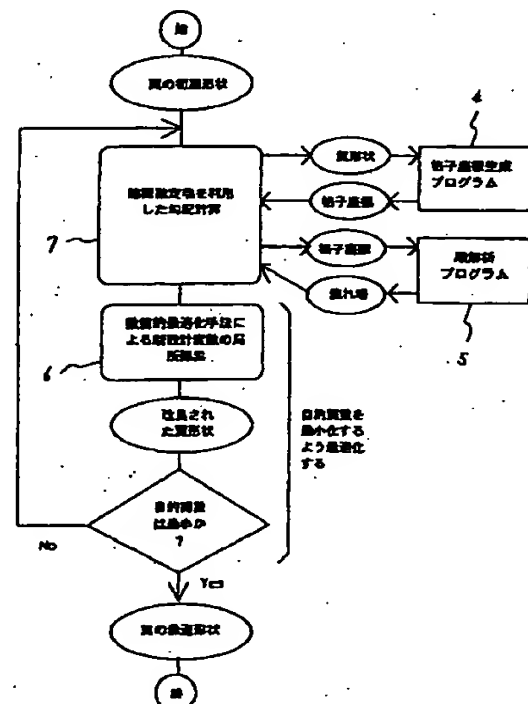
(74)代理人 弁理士 佐藤 一雄 (外3名)

(54)【発明の名称】 ターボ機械の翼形状の設計方法

(57)【要約】

【課題】 多数の設計変数で定義された自由度の高い翼形状であっても現実的な計算時間とコストで最適化を行うことができるターボ機械の翼形状の設計方法を提供する。

【解決手段】 与えられた初期形状に対して、格子座標演算部4にて格子座標を生成し、順解析演算部5にて圧縮性・粘性流体方程式に基づく順解析手法を用いて流れ場を解く。次に目的関数勾配演算部7において、陰関数定理を用いて一つの連立1次方程式を解くことにより目的関数の勾配を求める。そして最適化演算部6において、数値的最適化手法を用いて目的関数を最も効率よく低減させる形状修正の方向と量を求め、翼形状を修正する。これらの操作の結果、目的関数が最小となるか、または設計仕様を満足する結果となるまで、逐次更新された翼形状に対してこれらの操作を繰り返す。



## 【特許請求の範囲】

【請求項 1】ターボ機械翼列の翼形状を、圧縮性粘性流体方程式を用いて目的関数を評価しつつ最適化する方法において、陰関数定理を用いることによって、一回連立 1 次方程式を解くだけで一回の翼形状変更に対する目的関数の変化の勾配を求めることを特徴としたターボ機械の翼形状の設計方法。

【請求項 2】ターボ機械翼列の翼形状を、圧縮性粘性流体方程式を用いて目的関数を評価しつつ最適化する方法において、陰関数定理を用いて翼形状変更に対する目的関数の変化の勾配を求める際に、式 (38) ~ (41) を用いて境界条件を満足しつつ境界における変数変動を内部の変数変動に結びつけたことを特徴としたターボ機械の翼形状の設計方法。

【請求項 3】形状を複数の定義点とスプライン関数補間によって定義することを特徴とする請求項 1 または 2 のターボ機械の翼形状の設計方法。

【請求項 4】複数の定義点をキャンバ線の形状と翼厚さ分布によって定義することを特徴とする請求項 3 のターボ機械の翼形状の設計方法。

【請求項 5】形状を複数の定義点と隣接するものの勾配が隣接点において一致する複数の円弧による補間によって定義することを特徴とする請求項 1 または 2 のターボ機械の翼形状の設計方法。

【請求項 6】目的関数として、翼列の下流において平均処理された損失または効率を用いることを特徴とする請求項 1 ~ 5 のターボ機械の翼形状の設計方法。

【請求項 7】目的関数として、翼列の下流において平均処理された作動流体の流れ角度、もしくは翼列の上流で平均処理された作動流体の流入角度と該翼列下流平均流れ角度の差をとった転向角を用いることを特徴とする請求項 1 ~ 5 のターボ機械の翼形状の設計方法。

【請求項 8】目的関数として、翼面上の圧力勾配を用いることを特徴とする請求項 1 ~ 5 のターボ機械の翼形状の設計方法。

【請求項 9】目的関数として、翼面上マッハ数の最大値を用いることを特徴とする請求項 1 ~ 5 のターボ機械の翼形状の設計方法。

【請求項 10】目的関数として、翼面上速度分布を用いることを特徴とする請求項 1 ~ 5 のターボ機械の翼形状の設計方法。

【請求項 11】目的関数として、翼面上の境界層遷移位置を用いることを特徴とする請求項 1 ~ 5 のターボ機械の翼形状の設計方法。

【請求項 12】目的関数として、翼面上の境界層の速度分布を用いることを特徴とする請求項 1 ~ 5 のターボ機械の翼形状の設計方法。

【請求項 13】請求項 6 ~ 12 に記載の目的関数を複数、個線形に合成して用いることを特徴とするターボ機械の翼形状の設計方法。

【請求項 14】制約条件として、翼列の下流において平均処理された作動流体の流れ角度、もしくは翼列の上流で平均処理された作動流体の流入角度と該翼列下流平均流れ角度の差をとった転向角を用いることを特許請求項 1 ~ 13 のターボ機械の翼形状の設計方法。

【請求項 15】制約条件として、翼の最大厚さを用いることを特徴とする請求項 1 ~ 14 のターボ機械の翼形状の設計方法。

【請求項 16】請求項 1 から 13 に記載されたターボ機械の翼形状の設計手法の一部、または全部を含むことを特徴とするターボ機械の翼形状の設計ソフトウェアまたは設計システム。

【請求項 17】請求項 1 から 16 に記載されたターボ機械の翼形状の設計手法または設計ソフトウェアまたは設計システムによって設計されたことを特徴とするターボ機械の翼。

【発明の詳細な説明】発明の属する技術分野本発明は、ターボ機械において、高性能の翼形状を設計する方法または設計ソフトウェアまたは設計システムまたはこれらによって設計されたターボ機械の翼に関する。従来の技術ターボ機械の翼列の翼形状は、機械全体の性能に大きく影響する。このため、従来から高性能の翼形状を設計する試みが行われている。従来、たとえば圧縮機翼列においては文献 NACASP 36 に示されるように、特定の翼形状に対して系統的に実施された実験データを基本とし、さらに経験に基づく補正によって翼の特性や性能を予測し、これに基づいて翼形状を決定する方法があった。ところが、この方法に代表されるような、実験結果あるいは経験に基づく方法では、翼形状をある程度まで改良することはできても、特定の条件に対して最良の形状を得ることは困難であった。このため、翼回りの作動流体の速度分布を与え、この速度分布が得られるような翼形状を求める、いわゆる逆解法によってより高性能な翼を実現しようとする試みがなされており、例えば Schürmidt, E., Trans. ASME, J. Eng. Power, Vol. 102 に示されているように、有効性が報告されている。しかしながら、この種の方法では最適な翼形状を得るためには、与えられた設計条件を実現するために、最も好ましい速度分布を事前に設定して、入力値として与える必要があり、特定の仕様に対して最適な翼形状を直接的に得ることができない。さらに、翼の性能には翼表面の境界層の挙動、すなわち流体の粘性に起因する挙動が重要な影響を及ぼすにもかかわらず、作動流体の粘性の影響を上述のような逆解法の中で直接的に考慮することは困難であった。

発明が解決しようとする課題

ターボ機械の翼列の翼形状を設計する方法としては、もっと直接的に、数値シミュレーションによって翼の性能や特性を評価しながら翼形状を最適化する方法も提案されている。例えば、第 10 回ガスタービン秋期講演回講

演論文集B-9に示されているように、設計変数の個数だけ流れの数値シミュレーションを実行して、翼形状変更に対する目的関数の変化の勾配を求め、数値的最適化手法を用いて目的関数の値を最小化するように翼形状を逐次修正してゆく方法がある。この方法では、数値シミュレーションとして圧縮性・粘性の双方を考慮した流体方程式、いわゆるナビエ・ストークス方程式に基づく解析を用いることによって翼の特性・性能を直接的に評価することが可能であるが、ナビエ・ストークス解析は一回あたりの計算時間・コストを要する。さらに、このような最適化手法では、自由度の高い翼形状、すなわち多数の設計変数で定義された翼形状を最適化しようとする、膨大な回数のナビエ・ストークス解析を実施する必要があり、結局、設計全体に要する時間あるいは計算コストの観点から、限られた設計変数で定義される翼形状以外への適用は実用的ではないという問題があった。一方、A. E. Dixonらによる「OPTIMIZATION APPLIED TO AEROFOIL DESIGN」のように、最適化におけるこのような問題を解決するために、陰関数定理を導入して、一回の翼の形状変更における目的関数の勾配を一個の連立方程式を解くことによって求める試みもなされているが、単独で存在する翼の設計方法であってターボ機械で用いられるような翼列の翼設計に適用することは困難であり、また圧縮性を考慮することができないため、衝撃波の影響によって性能が大きく変化する遷音速翼列の設計に適用することも不可能であった。本発明の目的は、上記ターボ機械の翼列の翼形状を最適化によって設計する方法の問題点を解決し、翼の性能に大きな影響を及ぼす圧縮性と粘性の双方の影響を考慮できる数値シミュレーションを用いて翼列の翼の特性・性能を直接的に評価する方法を用いながら、目的関数の勾配を求める操作を効率化し、多数の設計変数で定義された翼形状であっても、一回の形状修正に対して一個の連立方程式を解くのみで目的関数の勾配を短時間にかつ容易に求める方法を導入することによって、多数の設計変数で定義された自由度の高い翼形状であっても現実的な計算時間とコストで最適化が可能なターボ機械の翼形状の設計方法または設計プログラムまたは設計システムを提供し、さらにこれらによって、従来方法では設計不可能であった高性能なターボ機械の翼を提供することにある。

課題を解決するための手段

請求項1に対応するターボ機械の翼形状の設計方法では、圧縮性粘性流体方程式を用いて目的関数を評価しつつ最適化する方法において、陰関数定理を用いることによって、一回連立1次方程式を解くだけで一回の翼形状変更に対する目的関数の変化の勾配を求める。

すなわち、圧縮性粘性流体方程式を用いることにより、外部手段を用いることなく、失や流れ角度など翼列の特性や性能を現す値を目的関数として直接的に評価するこ

とができるため、翼列の設計仕様をそのまま目標値（または制約条件）としている。さらに、陰関数定理を用いることによって設計変数毎に圧縮性粘性流体方程式を解いて目的関数の勾配を求めるのではなく、全ての設計変数に対する目的関数の勾配ベクトルを一個の1次元連立方程式を解くのみで得ている。次に、請求項2に対応するターボ機械の翼形状の設計方法では、圧縮性粘性流体方程式を用いて目的関数を評価しつつ最適化する方法において、陰関数定理を用いて翼形状変更に対する目的関数の変化の勾配を求める際に、式(38)～(41)を用いて境界条件を満足しつつ境界における変数変動を内部の変数変動に結びつける。そして式(38)～(41)を用いることによって、従来困難であった圧縮性を考慮した流体方程式を用いた場合に対する境界条件、すなわち上流境界におけるトータル量の固定と、下流境界における静圧の固定を目的関数の勾配計算に導入することができる。次に、請求項3に対応するターボ機械の翼形状の設計方法では、請求項1または2のターボ機械の翼形状の設計方法において、翼形状を複数の点とスプライン関数補間によって定義する。このように、翼形状を複数の点とスプライン関数補間によって定義することで、少ない定義点すなわち設計変数によって自由かつ滑らかな翼形状を表現することができる。次に、請求項4に対応するターボ機械の翼形状の設計方法では、請求項4のターボ機械の翼形状の設計方法において、翼形状の定義点をキャンバ線の形状と翼厚さ分布によって与える。このように、翼形状をキャンバ線の形状と翼厚さ分布によって定義することで、少ない設計変数によって翼形状を表現することができ、さらに、従来の翼形状との特徴の比較が容易となる。次に、請求項5に対応するターボ機械の翼形状の設計方法では、請求項1または2のターボ機械の翼形状の設計方法において、翼形状を定義点と円弧によって定義する。このとき、翼形状が滑らかとなるために、隣接する円弧の勾配は隣接点において一致するものとする。このように、点と円弧によって翼形状を定義することで、比較的形狀の自由度は小さくなるが、非常に少ない数の設計変数によって翼形状を表現することも可能となり、あまり高度な要求がない場合には、設計時間やコストを低減することができる。次に、請求項6に対応するターボ機械の翼形状の設計方法では、請求項1～5のターボ機械の翼形状の設計方法において、目的関数として、翼列の下流において平均処理された損失または効率を用いる。圧縮性・粘性流体方程式を用いることによって、翼列の損失または効率を評価することができるが、このように、平均処理された値を用いることで、目的関数の数を少なくすることができる。次に、請求項7に対応するターボ機械の翼形状の設計方法では、請求項1～5のターボ機械の翼形状の設計方法において、目的関数として、翼列の下流において平均処理された作動流体の流れ角度もしくは翼列の上流で

平均処理された作動流体の流入角度と該翼列下流平均流れ角度の差をとった転向角を用いる。圧縮性・粘性流体方程式を用いることによって、境界層の影響を考慮した作動流体の流れ角度を評価することができ、この段階で得られた翼型が、通常設計条件として与えられる翼列のなす仕事を満足しているか評価できるが、このように、平均処理された値を用いることで、目的関数の数を少なくすることができる。ここで、一般に翼列に対する作動流体の流入角度は設計仕様として与えられるから、このような場合には、上記作動流体の翼列下流における流れ角度を目的関数とすることは、転向角を目的関数とすることと同じ意味を持つ。次に、請求項 8 に対応するターボ機械の翼形状の設計方法では、請求項 1～5 のターボ機械の翼形状の設計方法において、目的関数として、翼面上の圧力勾配を用いる。圧縮性・粘性流体方程式を用いることによって、境界層の影響を考慮した作動流体の挙動を評価することができるが、翼面における圧力勾配を評価することによって、境界層の剥離など翼にとって好ましからざる現象を比較的容易に予測することができる。したがって、翼面上の圧力勾配を目的関数として採用することで考慮することで高性能な翼型を比較的容易に得ることができる。次に、請求項 9 に対応するターボ機械の翼形状の設計方法では、請求項 1～5 のターボ機械の翼形状の設計方法において、目的関数として、翼面上の最大マッハ数を用いる。圧縮性・粘性流体方程式を用いることによって、衝撃波と境界層の影響を考慮した作動流体の挙動を評価することができる。とくに選音速条件で使用される翼型では、衝撃波の影響を極力小さくすることが設計上重要であるが、これには翼面上のマッハ数の最大値を押さえることが有効である。したがって、翼面上のマッハ数の最大値を目的関数として採用することで高性能な翼型が得られる。次に、請求項 10 に対応するターボ機械の翼形状の設計方法では、請求項 1～5 のターボ機械の翼形状の設計方法において、目的関数として、翼面上の速度分布を用いる。場合によっては、従来の経験などから理想的な翼面上の速度分布が明らかとなっている場合もあるが、このような場合にはこれを目的関数として与えることで、最も理想に近い翼形状を得ることができる。次に、請求項 11 に対応するターボ機械の翼形状の設計方法では、請求項 1～5 のターボ機械の翼形状の設計方法において、目的関数として、翼面上の境界層遷移位置を用いる。翼面上の境界層の挙動は、翼の性能に重要な影響を及ぼすが、層流境界層から乱流境界層への遷移位置、あるいは乱流境界層から層流境界層への逆遷移位置を翼面上の好ましい部分に配置することは高性能な翼型を設計するうえで重要である。したがって、翼面上の境界層遷移位置を目的関数として採用することで高性能な翼型が得られる。次に、請求項 12 に対応するターボ機械の翼形状の設計方法では、請求項 1～5 のターボ機械の翼形状の設計方

法において、目的関数として、翼面上の境界層速度分布、すなわち翼面上の境界層の形状を用いる。翼面上の境界層の挙動は、翼の性能に重要な影響を及ぼすが、厳密には境界層の形状を最も好ましい形に規定することが望ましい。もちろん、速度分布を規定して、これを目的関数とすることも不可能ではないが、境界層の形状はいわゆる形状係数（たとえば生井・井上著理工学社「粘性流体の力学」109ページ）で評価することができるから、形状係数を目的関数として採用することで高性能な翼型が得られる。次に、請求項 13 に対応するターボ機械の翼形状の設計方法では、請求項 6～12 における目的関数を複数個線形に合成して用いる。実際には、請求項 6～12 の目的関数を組合わせて使用することで、与えられた設計仕様に適合した翼型を設計することが可能となるが、それぞれを別々の目的関数として用いながら翼列の性能改善を実施するよりも、線形に合成することで、目的関数の数を少なくすることができ、その結果、より低コスト・短時間で目的の高性能翼型を得ることができる。次に、請求項 14 に対応するターボ機械の翼形状の設計方法では、請求項 6～13 において制約条件として、翼列の下流において平均処理された作動流体の流れ角度もしくは翼列の上流で平均処理された作動流体の流入角度と該翼列下流平均流れ角度の差をとった転向角を用いる。翼列における作動流体の転向角は、設計仕様として与えられる場合が多く、この場合にはこれらを許容誤差範囲内とすることが必要となる。圧縮性・粘性流体方程式を用いることによって、境界層の影響を考慮した作動流体の流れ角度を評価することができるので、作動流体の翼列下流における流れ角度もしくは転向角を制約条件とすることで、与えられた設計仕様を満足させながら翼形状を改良することが可能となる。次に、請求項 15 に対応するターボ機械の翼形状の設計方法では、請求項 6～13 において制約条件として、翼の最大厚さを用いる。翼列における最大厚さ、すなわち翼の原さは流体的な設計よりも構造的な制約から設計仕様として与えられる場合が多く、この場合にはこれらを許容誤差範囲内とすることが必要となる。したがって、翼の最大庫さを制約条件とすることで、与えられた設計仕様を満足させながら翼形状を改良することが可能となる。次に、請求項 16 に対応するターボ機械の翼形状の設計ソフトウェアまたは設計システムは、請求項 1 から 15 までに記載された設計手法を具体化したものである。そして、このように設計手法の手続きを設計ソフトウェア化あるいは設計システム化することによって、実際の設計への適用が容易となる。次に、請求項 17 に対応するターボ機械の翼は、請求項 1 から 16 までに記載された設計手法または設計ソフトウェアまたは設計システムのいずれかを用いて設計されたターボ機械の翼である。発明の実施の形態

（第 1 の実施の形態）（請求項 1、2、3、6、7、1

## 2. 15 対応)

図 1 には本発明の第 1 の実施の形態のターボ機械の翼形状の設計方法の回路構成図が示されている。まず、与えられた初期形状に対して、格子座標演算部 4 において格子座標を、さらに順解析演算部において圧縮性・粘性流体方程式に基づく順解析手法を用いて流れ場を解く。次に目的関数の勾配は、これらの結果を用いて目的関数勾配演算部 7 において、陰関数定理を用いて一つの連立 1 次元方程式を解くことによって求める。次に、最適化演算部において、数値的最適化手法を用いて目的関数を最も効率よく低減させる形状修正の方向と量を求め、翼形状を修正する。これらの操作の結果、目的関数が最小となるか、または設計仕様を満足する結果が得られたときに最適化が完了するものとし、条件が満足されなければ

$$g = \nabla_D F(x_D)$$

となる。流れ解析では、多数の格子点を流れ場の中に配置し、その格子点での流体変数の値を計算する。したがって、目的関数  $F$  は設計変数  $x_D$  の関数であると同時に

$$F(x_D) = F(x_f, x_g)$$

すると、勾配  $g$  の  $i$  成分を次のように書ける。

$$\begin{aligned} g_i &= \frac{\partial F(x_f, x_g)}{\partial x_D^i} \\ &= h_i + (\nabla_f F)^T b_i \end{aligned} \quad (1)$$

ここで

$$h_i = \sum_j \frac{\partial F(x_f, x_g)}{\partial x_g^j} \frac{\partial x_g^j}{\partial x_D^i} \quad (2)$$

$$\nabla_f F = \nabla_f F(x_f, x_g) \quad (3)$$

$$b_i = \frac{\partial x_f}{\partial x_D^i} \quad (4)$$

したがって、目的関数  $F$  の設計変数  $x_D$  についての勾配（流体変数  $x_f$  を固定） $h_i$ 、目的関数  $F$  の流体変数  $x_f$  についての勾配（格子座標  $x_g$  を固定） $\nabla_f F$ 、流体変数  $x_f$  の設計変数  $x_D$  についての勾配  $b_i$  の値がわかると、目的関数の勾配を計算できる。 $\nabla_f F$  は、目的関

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho E \end{pmatrix} \quad (5)$$

ここで  $\rho$ 、 $u$ 、 $v$  はそれぞれ密度、速度の  $x$  成分、 $y$  成分。また、 $E$  は単位質量当たりの全エネルギーで、内部

$$E = e + K$$

但し

$$e = c_v T \quad (6)$$

$$K = \frac{1}{2}(u^2 + v^2) \quad (7)$$

したがって、 $\nabla_f F$  は格子座標を変化させず、これらの

ば、逐次更新された翼形状に対してこれらの操作を繰り返す。従来の技術を利用して翼形状を最適設計する回路構成図が図 6 に示されている。従来の技術によれば、目的関数の勾配は、目的関数勾配演算部 15 において、設計変数の個数だけ流れの数値シミュレーションを実行して計算する必要があった。本発明では、目的関数の勾配を以下のように計算する。翼の形状は、たとえば請求項 3 に記載の方法により図 4 に示されているように、 $n_D$  個の定義点  $11(x_i, y_i)$  ( $i = 0, 1, \dots, n_D$ ) とスプライン補間部分 12 によって決める。そして、データ点の、初期形状での位置からその法線方向の距離  $d_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n_D$ ) を設計変数  $x_D$  とする。すると、目的関数  $F$  の設計変数についての勾配  $g$  は

(1)

流体変数  $x_f$  と格子座標  $x_g$  の関数ともみなせる。すなわち

(2)

(3)

数を格子座標と流体変数の関数とみなしたときの、目的関数の流体変数についての勾配である。流体変数は各セルの中心で定義される。次の 4 種類の変数  $u_1$ 、 $u_2$ 、 $u_3$ 、 $u_4$  からなる。

(7)

エネルギー  $e$  と運動エネルギー  $K$  の和である。すなわち

(8)

(9)

(10)

流体変数に一つずつ擾乱を与えて目的関数を計算し直す

ことにより計算できる。そして、 $\nabla_f F$ の各成分は

$$\nabla_f F = \begin{pmatrix} \frac{\partial F(x_f, x_g)}{\partial u_1^{(1,1)}} \\ \frac{\partial F(x_f, x_g)}{\partial u_1^{(2,1)}} \\ \vdots \\ \frac{\partial F(x_f, x_g)}{\partial u_1^{(IM-1, JM-1)}} \\ \frac{\partial F(x_f, x_g)}{\partial u_2^{(1,1)}} \\ \frac{\partial F(x_f, x_g)}{\partial u_2^{(2,1)}} \\ \vdots \\ \frac{\partial F(x_f, x_g)}{\partial u_2^{(IM-1, JM-1)}} \\ \frac{\partial F(x_f, x_g)}{\partial u_3^{(1,1)}} \\ \frac{\partial F(x_f, x_g)}{\partial u_3^{(2,1)}} \\ \vdots \\ \frac{\partial F(x_f, x_g)}{\partial u_3^{(IM-1, JM-1)}} \\ \frac{\partial F(x_f, x_g)}{\partial u_4^{(1,1)}} \\ \frac{\partial F(x_f, x_g)}{\partial u_4^{(2,1)}} \\ \vdots \\ \frac{\partial F(x_f, x_g)}{\partial u_4^{(IM-1, JM-1)}} \end{pmatrix} \quad (11)$$

となる。ここで  $u_1, u_2, u_3, u_4$  の上付き添え字はセル座標  $(i, j)$  をあらわす。  $1 \leq i \leq IM-1$ ,  $1 \leq j \leq JM-1$  が内部領域、 $i=0, IM, 1 \leq j \leq JM-1$  が境界領域である。さらに、仮想境界  $i=-1, IM+1, 1 \leq j \leq JM-1$  を設ける。内部領域の流体変数の個数を  $n_f$  とすると、この  $\nabla_f F$  は  $n_f$  次元ベクトルである。

設計変数  $x_D$  を変えると格子座標  $x_y$  も変わる。式 (12) で定義される  $h$  は、そのとき流体変数は変化させずに格子座標だけが変ったとしたときの目的関数  $F$  の変

$$h = \begin{pmatrix} \sum_j \frac{\partial F(x_f, x_g)}{\partial x_j^i} \frac{\partial x_j^i}{\partial x_D^i} \\ \sum_j \frac{\partial F(x_f, x_g)}{\partial x_j^j} \frac{\partial x_j^j}{\partial x_D^j} \\ \vdots \\ \sum_j \frac{\partial F(x_f, x_g)}{\partial x_j^j} \frac{\partial x_j^j}{\partial x_D^j} \end{pmatrix} \quad (12)$$

となる。  $h$  は  $n_D$  次元ベクトルになる。式 (6) で定義

化である。設計変数  $x_D$  に一つずつ擾乱を与えて新格子を生成する。そして、そのたびに目的関数  $F$  を計算し直すことにより計算できる。  $h$  の各成分を書くと

された  $b_i$  は次のような  $n_f$  次元ベクトルになる。



$$b_i = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1^{(1,1)}}{\partial x_D^1} \\ \frac{\partial u_1^{(2,1)}}{\partial x_D^2} \\ \vdots \\ \frac{\partial u_1^{(IM-1, JM-1)}}{\partial x_D^{IM-1}} \\ \frac{\partial u_2^{(1,1)}}{\partial x_D^1} \\ \frac{\partial u_2^{(2,1)}}{\partial x_D^2} \\ \vdots \\ \frac{\partial u_2^{(IM-1, JM-1)}}{\partial x_D^{IM-1}} \\ \frac{\partial u_3^{(1,1)}}{\partial x_D^1} \\ \frac{\partial u_3^{(2,1)}}{\partial x_D^2} \\ \vdots \\ \frac{\partial u_3^{(IM-1, JM-1)}}{\partial x_D^{IM-1}} \\ \frac{\partial u_4^{(1,1)}}{\partial x_D^1} \\ \frac{\partial u_4^{(2,1)}}{\partial x_D^2} \\ \vdots \\ \frac{\partial u_4^{(IM-1, JM-1)}}{\partial x_D^{IM-1}} \end{pmatrix} \quad (13)$$

この  $b_i$  を、陰関数定理を利用して残差ベクトル  $R(x_f, x_g)$  から求める。格子座標と流体変数は、各格子点上でナビエ・ストークス方程式を差分化してできた残差方程式を満足せねばならない。すなわち、残差ベクトル  $R(x_f, x_g)$  は次式を満たす。

$$R(x_f, x_g) = 0$$

$$R(x_f + \Delta x_f, x_g + \Delta x_g) = 0 \quad (14)$$

残差ベクトルは流体変数と同じ次元で、 $n_f$  次元である。設計変数  $x_D$  を変化させて  $x_D + \Delta x_D$  としたとき流体変数  $x_f$  と格子座標  $x_g$  がそれぞれ  $x_f + \Delta x_f$ 、 $x_g + \Delta x_g$  になったとすると、新しい流体変数と格子座標は残差方程式を満足しなければならない。すなわち

このことから

$$\sum_k \frac{\partial R}{\partial x_f^k} \frac{\partial x_f^k}{\partial x_D^i} + \sum_k \frac{\partial R}{\partial x_g^k} \frac{\partial x_g^k}{\partial x_D^i} = J_f b_i + d_i = 0 \quad (15)$$

を得る。ここで

$$J_f = \frac{\partial R}{\partial x_f}$$

は残差  $R(x_f, x_g)$  の流体変数  $x_f$  についてのヤコビ行列である。また  $d_i$  は次式で定義される  $n_f$  次元ベクトルである。

$$d_i = \sum_k \frac{\partial R}{\partial x_g^k} \frac{\partial x_g^k}{\partial x_D^i} \quad (16)$$

これから  $b_i$  が次のように求められる。

$$b_i = -J_f^{-1} d_i \quad (17)$$

式 (17) を使うと、式 (3) に示した、目的関数  $F$  の設計変数  $x_D$  についての勾配  $g$  の  $i$  成分は次のように書

$$\begin{aligned} g_i &= h_i + (\nabla_f F)^T b_i \\ &= h_i - d_i^T (J_f^{-1})^T \nabla_f F \end{aligned} \quad (18)$$

き直せる。

一方、式(16)の $d_i$ を使うと残差 $R(x_f, x_g)$  定義できる。

の設計変数 $x_D$ についてのヤコビ行列 $J_D$ を次のように

$$J_D = (d_1 \ d_2 \ \dots \ d_{n_D}) \quad (19)$$

これから、式(18)をベクトル表示すると勾配 $g$ は次のようになる。

$$g = \nabla_D F(x_D) = h - J_D^T (J_f^{-1})^T \nabla_f F \quad (20)$$

$g$ は $n_D$ 次元ベクトルである。

式(20)の右辺の第2項の $(J_f^{-1})^T \nabla_f F$ は連立1次方程式

$$J_f^T x = \nabla_f F \quad (21)$$

を解いて計算する。さらに、請求項2の発明によれば、圧縮性を考慮した粘性流体方程式の境界条件を導入し、境界における変数変動を内部の変数変動と結びつけるために、次の方法を用いる。 $J_f$ は、残差 $R$ の流体変数 $x_D$ についてのヤコビ行列である。流体変数に加わった擾乱に対する、残差の感度である。ある格子点での残差 $R_i$ はその格子点及びそれに隣接する格子点で定義された流体変数のみの関数になる。したがって、式(74)が

$$\frac{\partial Q}{\partial u_1} = -\frac{1}{\rho} [C + \frac{\gamma}{a} (-E + C^2)] \quad (22)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial u_2} = \frac{u}{\rho} (\frac{1}{C} + \frac{\gamma}{a}) \quad (23)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial u_3} = \frac{v}{\rho} (\frac{1}{C} + \frac{\gamma}{a}) \quad (24)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial u_4} = -\frac{\gamma}{a\rho} \quad (25)$$

となる。まず上流境界条件を組み込むため、この感度を使って、境界での変数の変動を内部領域での変数の変動と結び付ける。境界 $(0, j)$ での値を下付添え字0で表すことにする。この境界でのリーマン不変量 $Q_0$ は内部領域 $(1, j)$ でのリーマン不変量 $Q_1$ に等しい。すなわち

$$Q_0 = Q_1 = Q$$

ここで

$$Q_0 = C_0 - \frac{2}{\gamma-1} a_0$$

$$C_0 = \sqrt{(u)_0^2 + (v)_0^2}$$

$$a_0 = \sqrt{\gamma R T_0}$$

$$Q_1 = C_1 - \frac{2}{\gamma-1} a_1$$

$$C_1 = \sqrt{(u)_1^2 + (v)_1^2}$$

$$a_1 = \sqrt{\gamma R T_1}$$

$$C_0 = \frac{(\gamma-1)Q + \sqrt{4(\gamma+1)c_p T_t - 2(\gamma-1)Q^2}}{\gamma+1} \quad (26)$$

他の変数は $C_0$ を使って、次のようにあらわせる。

らわかるように $J_f$ のそれらの流体変数に相当する要素のみが非零になる。流体変数は境界条件を満たさねばならない。したがって、この境界条件を満足させながら流体変数に擾乱を与えねばならない。そのため、以下のようにして境界条件を組み込むことにする。速度の大きさ、音速、リーマン不変量をそれぞれ $C$ 、 $a$ 、 $Q$ であらわすことにする。すると、リーマン不変量 $Q$ の流体変数についての感度は

また、この境界において、全圧 $p_t$ 、全温 $T_t$ 、流入角 $\beta_s$ を固定する。そうすると、速度の大きさ $C_0$ は $Q$ を使って次のように表現できる。

$$u_0 = C_0 \cos \beta_s \quad (27)$$

$$v_0 = C_0 \sin \beta_s \quad (28)$$

$$T_0 = T_i - \frac{1}{2c_p} C_0^2 \quad (29)$$

$$E_0 = c_v T_i + \frac{\gamma-1}{2\gamma} C_0^2 \quad (30)$$

$$p_0 = p_i \left( \frac{T_0}{T_i} \right)^{\gamma/(\gamma-1)} \quad (31)$$

$$\rho_0 = \frac{p_i}{RT_i^{\gamma/(\gamma-1)}} \left( T_i - \frac{1}{2c_p} C_0^2 \right)^{1/(\gamma-1)} \quad (32)$$

以上から、 $C_0$  の  $Q$  についての感度は次のようになる。

$$\frac{\partial C_0}{\partial Q} = (\gamma-1) \frac{C_0 - Q}{(\gamma+1)C_0 - (\gamma-1)Q} \quad (33)$$

また、境界  $(0, j)$  での流体変数  $(u_1)_0$ 、

感度は次のようになる。

$(u_2)_0$ 、 $(u_3)_0$ 、 $(u_4)_0$  の  $C_0$  についての

$$\frac{\partial (u_1)_0}{\partial C_0} = -\frac{1}{\gamma-1} \frac{\rho_0 C_0}{c_p T_0} \quad (34)$$

$$\frac{\partial (u_2)_0}{\partial C_0} = \rho_0 u_0 \left( \frac{1}{C_0} - \frac{1}{\gamma-1} \frac{C_0}{c_p T_0} \right) \quad (35)$$

$$\frac{\partial (u_3)_0}{\partial C_0} = \rho_0 v_0 \left( \frac{1}{C_0} - \frac{1}{\gamma-1} \frac{C_0}{c_p T_0} \right) \quad (36)$$

$$\frac{\partial (u_4)_0}{\partial C_0} = \rho_0 C_0 \left( \frac{\gamma-1}{\gamma} - \frac{1}{\gamma-1} \frac{E_0}{c_p T_0} \right) \quad (37)$$

境界  $(0, j)$  での変数の変動  $(\Delta u_1)_0$ 、 $(\Delta u_2)_0$ 、 $(\Delta u_3)_0$ 、 $(\Delta u_4)_0$  を解析セル

$(1, j)$  での変数の変動を使ってあらわと次のように

$$(\Delta u_1)_0 = \frac{\partial (u_1)_0}{\partial C_0} \frac{\partial C_0}{\partial Q} \left( \frac{\partial Q}{\partial u_1} \Delta u_1 + \frac{\partial Q}{\partial u_2} \Delta u_2 + \frac{\partial Q}{\partial u_3} \Delta u_3 + \frac{\partial Q}{\partial u_4} \Delta u_4 \right) \quad (38)$$

$$(\Delta u_2)_0 = \frac{\partial (u_2)_0}{\partial C_0} \frac{\partial C_0}{\partial Q} \left( \frac{\partial Q}{\partial u_1} \Delta u_1 + \frac{\partial Q}{\partial u_2} \Delta u_2 + \frac{\partial Q}{\partial u_3} \Delta u_3 + \frac{\partial Q}{\partial u_4} \Delta u_4 \right) \quad (39)$$

$$(\Delta u_3)_0 = \frac{\partial (u_3)_0}{\partial C_0} \frac{\partial C_0}{\partial Q} \left( \frac{\partial Q}{\partial u_1} \Delta u_1 + \frac{\partial Q}{\partial u_2} \Delta u_2 + \frac{\partial Q}{\partial u_3} \Delta u_3 + \frac{\partial Q}{\partial u_4} \Delta u_4 \right) \quad (40)$$

$$(\Delta u_4)_0 = \frac{\partial (u_4)_0}{\partial C_0} \frac{\partial C_0}{\partial Q} \left( \frac{\partial Q}{\partial u_1} \Delta u_1 + \frac{\partial Q}{\partial u_2} \Delta u_2 + \frac{\partial Q}{\partial u_3} \Delta u_3 + \frac{\partial Q}{\partial u_4} \Delta u_4 \right) \quad (41)$$

ここで

$$\frac{\partial (u_1)_0}{\partial C_0} = -\frac{1}{\gamma-1} \frac{\rho_0 C_0}{c_p T_0} \quad (42)$$

$$\frac{\partial (u_2)_0}{\partial C_0} = \rho_0 u_0 \left( \frac{1}{C_0} - \frac{1}{\gamma-1} \frac{C_0}{c_p T_0} \right) \quad (43)$$

$$\frac{\partial (u_3)_0}{\partial C_0} = \rho_0 v_0 \left( \frac{1}{C_0} - \frac{1}{\gamma-1} \frac{C_0}{c_p T_0} \right) \quad (44)$$

$$\frac{\partial (u_4)_0}{\partial C_0} = \rho_0 C_0 \left( \frac{\gamma-1}{\gamma} - \frac{1}{\gamma-1} \frac{E_0}{c_p T_0} \right) \quad (45)$$

および

$$\frac{\partial C_0}{\partial Q} = (\gamma-1) \frac{C_0 - Q}{(\gamma+1)C_0 - (\gamma-1)Q} \quad (46)$$

は境界  $(0, j)$  の変数を使って計算する。そして

$$\frac{\partial Q}{\partial u_1} = -\frac{1}{\rho_1} \left[ C_1 + \frac{\gamma}{a_1} (-E_1 + C_1^2) \right] \quad (47)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial u_2} = \frac{(u_1)_1}{\rho_1} \left( \frac{1}{C_1} + \frac{\gamma}{a_1} \right) \quad (48)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial u_3} = \frac{(u_1)_1}{\rho_1} \left( \frac{1}{C_1} + \frac{\gamma}{a_1} \right) \quad (49)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial u_4} = -\frac{\gamma}{a_1 \rho_1} \quad (50)$$

は内部領域 (1, j) の変数を使って計算する。境界  
(-1, j) セルでの変数の値は境界 (0, j) セルで

の変数の値に等しくとる。したがって、変動も同一にな  
る。

$$(\Delta u_1)_{-1} = (\Delta u_1)_0 \quad (51)$$

$$(\Delta u_2)_{-1} = (\Delta u_2)_0 \quad (52)$$

$$(\Delta u_3)_{-1} = (\Delta u_3)_0 \quad (53)$$

$$(\Delta u_4)_{-1} = (\Delta u_4)_0 \quad (54)$$

次に、下流境界条件を組み込むために、境界での変数の  
変動を内部領域での変数の変動と結び付ける。境界 (1

M, j) セルでは、変数  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$  については次  
のように外挿する。

$$(u_1)_{IM} = 2(u_1)_{IM-1} - (u_1)_{IM-2} \quad (55)$$

$$(u_2)_{IM} = 2(u_2)_{IM-1} - (u_2)_{IM-2} \quad (56)$$

$$(u_3)_{IM} = 2(u_3)_{IM-1} - (u_3)_{IM-2} \quad (57)$$

境界 (IM, j) では圧力を固定する。その固定値を  $p_s$   
 $p_s = (\gamma - 1)(\rho)(e)_{IM}$

$s$  とすると  
(58)

であり、また

$$u_4 = \rho e + \frac{1}{2\rho} ((\rho u)^2 + (\rho v)^2) \quad (59)$$

とから、変数  $u_4$  は

$$(u_4)_{IM} = \frac{1}{\gamma - 1} p_s + \frac{1}{2} \frac{(2(u_2)_{IM-1} - (u_2)_{IM-2})^2 + (2(u_3)_{IM-1} - (u_3)_{IM-2})^2}{2(u_1)_{IM-1} - (u_1)_{IM-2}} \quad (60)$$

となる。変数  $(u_4)_{IM}$  について

$$\frac{\partial (u_4)_{IM}}{\partial (u_1)_{IM-1}} = -\frac{(2(u_2)_{IM-1} - (u_2)_{IM-2})^2 + (2(u_3)_{IM-1} - (u_3)_{IM-2})^2}{(2(u_1)_{IM-1} - (u_1)_{IM-2})^2} \quad (61)$$

$$\frac{\partial (u_4)_{IM}}{\partial (u_1)_{IM-2}} = \frac{1}{2} \frac{(2(u_2)_{IM-1} - (u_2)_{IM-2})^2 + (2(u_3)_{IM-1} - (u_3)_{IM-2})^2}{(2(u_1)_{IM-1} - (u_1)_{IM-2})^2} \quad (62)$$

$$\frac{\partial (u_4)_{IM}}{\partial (u_2)_{IM-1}} = 2 \frac{2(u_2)_{IM-1} - (u_2)_{IM-2}}{2(u_1)_{IM-1} - (u_1)_{IM-2}} \quad (63)$$

$$\frac{\partial (u_4)_{IM}}{\partial (u_2)_{IM-2}} = -\frac{2(u_2)_{IM-1} - (u_2)_{IM-2}}{2(u_1)_{IM-1} - (u_1)_{IM-2}} \quad (64)$$

$$\frac{\partial (u_4)_{IM}}{\partial (u_3)_{IM-1}} = 2 \frac{2(u_3)_{IM-1} - (u_3)_{IM-2}}{2(u_1)_{IM-1} - (u_1)_{IM-2}} \quad (65)$$

$$\frac{\partial (u_4)_{IM}}{\partial (u_3)_{IM-2}} = -\frac{2(u_3)_{IM-1} - (u_3)_{IM-2}}{2(u_1)_{IM-1} - (u_1)_{IM-2}} \quad (66)$$

境界 (IM, j) セルでの変数  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$  の変動 は次のようになる。

$$\Delta(u_1)_{IM} = 2\Delta(u_1)_{IM-1} - \Delta(u_1)_{IM-2} \quad (67)$$

$$\Delta(u_2)_{IM} = 2\Delta(u_2)_{IM-1} - \Delta(u_2)_{IM-2} \quad (68)$$

$$\Delta(u_3)_{IM} = 2\Delta(u_3)_{IM-1} - \Delta(u_3)_{IM-2} \quad (69)$$

境界 (IM, j) セルでの変数  $u_4$  の変動は次のように なる.

$$\begin{aligned}\Delta(u_4)_{IM} = & -\frac{(2(u_2)_{IM-1} - (u_2)_{IM-2})^2 + (2(u_3)_{IM-1} - (u_3)_{IM-2})^2}{(2(u_1)_{IM-1} - (u_1)_{IM-2})^2} \Delta(u_1)_{IM-1} \\ & + \frac{1}{2} \frac{(2(u_2)_{IM-1} - (u_2)_{IM-2})^2 + (2(u_3)_{IM-1} - (u_3)_{IM-2})^2}{(2(u_1)_{IM-1} - (u_1)_{IM-2})^2} \Delta(u_1)_{IM-2} \\ & + 2 \frac{2(u_2)_{IM-1} - (u_2)_{IM-2}}{2(u_1)_{IM-1} - (u_1)_{IM-2}} \Delta(u_2)_{IM-1} - \frac{2(u_2)_{IM-1} - (u_2)_{IM-2}}{2(u_1)_{IM-1} - (u_1)_{IM-2}} \Delta(u_2)_{IM-2} \\ & + 2 \frac{2(u_3)_{IM-1} - (u_3)_{IM-2}}{2(u_1)_{IM-1} - (u_1)_{IM-2}} \Delta(u_3)_{IM-1} - \frac{2(u_3)_{IM-1} - (u_3)_{IM-2}}{2(u_1)_{IM-1} - (u_1)_{IM-2}} \Delta(u_3)_{IM-2}\end{aligned}$$

境界 (IM+1, j) セルでの変数の値は境界 (IM, j) セルでの変数の値に等しくとる. したがって, 変動

$$(\Delta u_1)_{IM+1} = (\Delta u_1)_{IM} \quad (70)$$

$$(\Delta u_2)_{IM+1} = (\Delta u_2)_{IM} \quad (71)$$

$$(\Delta u_3)_{IM+1} = (\Delta u_3)_{IM} \quad (72)$$

$$(\Delta u_4)_{IM+1} = (\Delta u_4)_{IM} \quad (73)$$

以上得られた境界での変数の変動を用いてヤコビ行列  $J$  を修正する. 設計変数  $x_D$  を変化して  $x_D + \Delta x_D$  としたとき流体変数

$$u_1^{(i,j)}, u_2^{(i,j)}, u_3^{(i,j)}, u_4^{(i,j)}$$

$$u_1^{(i,j)} + \Delta u_1^{(i,j)}, u_2^{(i,j)} + \Delta u_2^{(i,j)}, u_3^{(i,j)} + \Delta u_3^{(i,j)}, u_4^{(i,j)} + \Delta u_4^{(i,j)}$$

になったとする. この流体変数の変化によって生じる残差の変化を検討する. 残差  $R_1^{(1,j)}$  を例にとる. すると上の流体変数の変化によって生じる残差  $R_1^{(1,j)}$  の変化量は次のようになる.

$$\begin{aligned}\Delta R_1^{(1,j)} = & \frac{\partial R_1^{(1,j)}}{\partial u_1^{(1,1)}} \Delta u_1^{(1,1)} + \frac{\partial R_1^{(1,j)}}{\partial u_1^{(2,1)}} \Delta u_1^{(2,1)} + \dots + \frac{\partial R_1^{(1,j)}}{\partial u_1^{(IM-1, JM-1)}} \Delta u_1^{(IM-1, JM-1)} \\ & + \frac{\partial R_1^{(1,j)}}{\partial u_2^{(1,1)}} \Delta u_2^{(1,1)} + \frac{\partial R_1^{(1,j)}}{\partial u_2^{(2,1)}} \Delta u_2^{(2,1)} + \dots + \frac{\partial R_1^{(1,j)}}{\partial u_2^{(IM-1, JM-1)}} \Delta u_2^{(IM-1, JM-1)} \\ & + \frac{\partial R_1^{(1,j)}}{\partial u_3^{(1,1)}} \Delta u_3^{(1,1)} + \frac{\partial R_1^{(1,j)}}{\partial u_3^{(2,1)}} \Delta u_3^{(2,1)} + \dots + \frac{\partial R_1^{(1,j)}}{\partial u_3^{(IM-1, JM-1)}} \Delta u_3^{(IM-1, JM-1)} \\ & + \frac{\partial R_1^{(1,j)}}{\partial u_4^{(1,1)}} \Delta u_4^{(1,1)} + \frac{\partial R_1^{(1,j)}}{\partial u_4^{(2,1)}} \Delta u_4^{(2,1)} + \dots + \frac{\partial R_1^{(1,j)}}{\partial u_4^{(IM-1, JM-1)}} \Delta u_4^{(IM-1, JM-1)} \\ & + \frac{\partial R_1^{(1,j)}}{\partial u_1^{(0,j)}} \Delta u_1^{(0,j)} + \frac{\partial R_1^{(1,j)}}{\partial u_1^{(0,j+1)}} \Delta u_1^{(0,j+1)} + \frac{\partial R_1^{(1,j)}}{\partial u_1^{(0,j-1)}} \Delta u_1^{(0,j-1)} + \frac{\partial R_1^{(1,j)}}{\partial u_1^{(-1,j)}} \Delta u_1^{(-1,j)} \\ & + \frac{\partial R_1^{(1,j)}}{\partial u_2^{(0,j)}} \Delta u_2^{(0,j)} + \frac{\partial R_1^{(1,j)}}{\partial u_2^{(0,j+1)}} \Delta u_2^{(0,j+1)} + \frac{\partial R_1^{(1,j)}}{\partial u_2^{(0,j-1)}} \Delta u_2^{(0,j-1)} + \frac{\partial R_1^{(1,j)}}{\partial u_2^{(-1,j)}} \Delta u_2^{(-1,j)} \\ & + \frac{\partial R_1^{(1,j)}}{\partial u_3^{(0,j)}} \Delta u_3^{(0,j)} + \frac{\partial R_1^{(1,j)}}{\partial u_3^{(0,j+1)}} \Delta u_3^{(0,j+1)} + \frac{\partial R_1^{(1,j)}}{\partial u_3^{(0,j-1)}} \Delta u_3^{(0,j-1)} + \frac{\partial R_1^{(1,j)}}{\partial u_3^{(-1,j)}} \Delta u_3^{(-1,j)} \\ & + \frac{\partial R_1^{(1,j)}}{\partial u_4^{(0,j)}} \Delta u_4^{(0,j)} + \frac{\partial R_1^{(1,j)}}{\partial u_4^{(0,j+1)}} \Delta u_4^{(0,j+1)} + \frac{\partial R_1^{(1,j)}}{\partial u_4^{(0,j-1)}} \Delta u_4^{(0,j-1)} + \frac{\partial R_1^{(1,j)}}{\partial u_4^{(-1,j)}} \Delta u_4^{(-1,j)}\end{aligned}$$

ここで最後の4行が境界の影響である.  $\frac{\partial R_1^{(1,j)}}{\partial u_1^{(0,j)}}$ ,  $\frac{\partial R_1^{(1,j)}}{\partial u_1^{(0,j+1)}}$ ,  $\frac{\partial R_1^{(1,j)}}{\partial u_1^{(0,j-1)}}$ ,  $\frac{\partial R_1^{(1,j)}}{\partial u_1^{(-1,j)}}$ , ... は境界条件に即

着せずに求める. 以上でみてきたように, 境界条件を使うと境界上の格子点での流体変数の変化量

$$\begin{array}{cccc}
\Delta u_1^{(0,j)}, & \Delta u_1^{(0,j+1)}, & \Delta u_1^{(0,j-1)}, & \Delta u_1^{(-1,j)} \\
\Delta u_2^{(0,j)}, & \Delta u_2^{(0,j+1)}, & \Delta u_2^{(0,j-1)}, & \Delta u_2^{(-1,j)} \\
\Delta u_3^{(0,j)}, & \Delta u_3^{(0,j+1)}, & \Delta u_3^{(0,j-1)}, & \Delta u_3^{(-1,j)} \\
\Delta u_4^{(0,j)}, & \Delta u_4^{(0,j+1)}, & \Delta u_4^{(0,j-1)}, & \Delta u_4^{(-1,j)}
\end{array}$$

は内部の格子点での流体変数の変化量

$$\Delta u_1^{(1,j)}, \Delta u_2^{(1,j)}, \Delta u_3^{(1,j)}, \Delta u_4^{(1,j)}$$

を用いて次の形で表現できる。

$$\begin{array}{lcl}
\Delta u_1^{(0,j)} & = & a_1^{(1,j)} \Delta u_1^{(1,j)} + a_2^{(1,j)} \Delta u_2^{(1,j)} + a_3^{(1,j)} \Delta u_3^{(1,j)} + a_4^{(1,j)} \Delta u_4^{(1,j)} \\
\Delta u_2^{(0,j)} & = & b_1^{(1,j)} \Delta u_1^{(1,j)} + b_2^{(1,j)} \Delta u_2^{(1,j)} + b_3^{(1,j)} \Delta u_3^{(1,j)} + b_4^{(1,j)} \Delta u_4^{(1,j)} \\
\Delta u_3^{(0,j)} & = & c_1^{(1,j)} \Delta u_1^{(1,j)} + c_2^{(1,j)} \Delta u_2^{(1,j)} + c_3^{(1,j)} \Delta u_3^{(1,j)} + c_4^{(1,j)} \Delta u_4^{(1,j)} \\
\Delta u_4^{(0,j)} & = & d_1^{(1,j)} \Delta u_1^{(1,j)} + d_2^{(1,j)} \Delta u_2^{(1,j)} + d_3^{(1,j)} \Delta u_3^{(1,j)} + d_4^{(1,j)} \Delta u_4^{(1,j)}
\end{array}$$

[illegible]

$$\begin{aligned}
& + \left( \frac{\partial R_1^{(1,j)}}{\partial u_4^{(0,j)}} + \frac{\partial R_1^{(1,j)}}{\partial u_4^{(-1,j)}} \right) d_4^{(1,j)} \Delta u_4^{(1,j)} \\
& + \left( \frac{\partial R_1^{(1,j)}}{\partial u_1^{(0,j+1)}} a_4^{(1,j+1)} + \frac{\partial R_1^{(1,j)}}{\partial u_2^{(0,j+1)}} b_4^{(1,j+1)} + \frac{\partial R_1^{(1,j)}}{\partial u_3^{(0,j+1)}} c_4^{(1,j+1)} + \frac{\partial R_1^{(1,j)}}{\partial u_4^{(0,j+1)}} d_4^{(1,j+1)} \right) \Delta u_4^{(1,j+1)} \\
& + \left( \frac{\partial R_1^{(1,j)}}{\partial u_1^{(0,j-1)}} a_4^{(1,j-1)} + \frac{\partial R_1^{(1,j)}}{\partial u_2^{(0,j-1)}} b_4^{(1,j-1)} + \frac{\partial R_1^{(1,j)}}{\partial u_3^{(0,j-1)}} c_4^{(1,j-1)} + \frac{\partial R_1^{(1,j)}}{\partial u_4^{(0,j-1)}} d_4^{(1,j-1)} \right) \Delta u_4^{(1,j-1)}
\end{aligned}$$

他の残差についても同様にする。すると、流体変数の境界条件を破らないように流体変数に擾乱を与えたとき

の、ヤコビ行列  $J_f$  が次のように得られる。

$$J_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial R_1}{\partial x_f} & \frac{\partial R_2}{\partial x_f} & \cdots & \frac{\partial R_{n_f}}{\partial x_f} \\ \frac{\partial R_1}{\partial x_f} & \frac{\partial R_2}{\partial x_f} & \cdots & \frac{\partial R_{n_f}}{\partial x_f} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial R_{n_f}}{\partial x_f} & \frac{\partial R_{n_f}}{\partial x_f} & \cdots & \frac{\partial R_{n_f}}{\partial x_f} \end{pmatrix} \quad (74)$$

この  $J_f$  は  $n_f \times n_f$  行列になる。残差の値は、流れ解析プログラムを利用して計算する。  $J_D$  は、残差  $R$  の設計変数  $x_D$  についてのヤコビ行列である。擾乱が格子座

標の擾乱になって残差に影響する。流体変数は固定しておく。次式から計算する。

$$J_D = \begin{pmatrix} \frac{\partial R_1^{(1,1)}}{\partial x_D} & \frac{\partial R_1^{(1,1)}}{\partial x_D} & \cdots & \frac{\partial R_1^{(1,1)}}{\partial x_D} \\ \frac{\partial R_1^{(2,1)}}{\partial x_D} & \frac{\partial R_1^{(2,1)}}{\partial x_D} & \cdots & \frac{\partial R_1^{(2,1)}}{\partial x_D} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial R_1^{(IM-1, JM-1)}}{\partial x_D} & \frac{\partial R_1^{(IM-1, JM-1)}}{\partial x_D} & \cdots & \frac{\partial R_1^{(IM-1, JM-1)}}{\partial x_D} \\ \frac{\partial R_2^{(1,1)}}{\partial x_D} & \frac{\partial R_2^{(1,1)}}{\partial x_D} & \cdots & \frac{\partial R_2^{(1,1)}}{\partial x_D} \\ \frac{\partial R_2^{(2,1)}}{\partial x_D} & \frac{\partial R_2^{(2,1)}}{\partial x_D} & \cdots & \frac{\partial R_2^{(2,1)}}{\partial x_D} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial R_2^{(IM-1, JM-1)}}{\partial x_D} & \frac{\partial R_2^{(IM-1, JM-1)}}{\partial x_D} & \cdots & \frac{\partial R_2^{(IM-1, JM-1)}}{\partial x_D} \\ \frac{\partial R_3^{(1,1)}}{\partial x_D} & \frac{\partial R_3^{(1,1)}}{\partial x_D} & \cdots & \frac{\partial R_3^{(1,1)}}{\partial x_D} \\ \frac{\partial R_3^{(2,1)}}{\partial x_D} & \frac{\partial R_3^{(2,1)}}{\partial x_D} & \cdots & \frac{\partial R_3^{(2,1)}}{\partial x_D} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial R_3^{(IM-1, JM-1)}}{\partial x_D} & \frac{\partial R_3^{(IM-1, JM-1)}}{\partial x_D} & \cdots & \frac{\partial R_3^{(IM-1, JM-1)}}{\partial x_D} \\ \frac{\partial R_4^{(1,1)}}{\partial x_D} & \frac{\partial R_4^{(1,1)}}{\partial x_D} & \cdots & \frac{\partial R_4^{(1,1)}}{\partial x_D} \\ \frac{\partial R_4^{(2,1)}}{\partial x_D} & \frac{\partial R_4^{(2,1)}}{\partial x_D} & \cdots & \frac{\partial R_4^{(2,1)}}{\partial x_D} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial R_4^{(IM-1, JM-1)}}{\partial x_D} & \frac{\partial R_4^{(IM-1, JM-1)}}{\partial x_D} & \cdots & \frac{\partial R_4^{(IM-1, JM-1)}}{\partial x_D} \end{pmatrix} \quad (75)$$

$J_D$  は  $n_f \times n_D$  行列である。設計変数に一つづつ擾乱を与えて新格子を生成する。そして、残差を計算し直してその変化から  $J_D$  を計算する。格子の座標は、格子生

成プログラムを利用して計算する。2次元翼列流れでは、 $J_f$  はつぎのような形になる。



$$J_f = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} & J_{14} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} & J_{24} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} & J_{34} \\ J_{41} & J_{42} & J_{43} & J_{44} \end{pmatrix}$$

ここで、行列  $J_{ij}$  は  $(n_f/4) \times (n_f/4)$  の21重対角行列である。そして、 $(n_f/4)$  次元ベクトル  $x_1, x_2, x_3, x_4$  を使って  $x^T = (x_1^T \ x_2^T \ x_3^T \ x_4^T)$  とし、 $\rho, \rho u, \rho v, \rho E$  に対応する流体変数をそれぞれ  $u_1, u_2, u_3, u_4$  とすると、方程式  $J_f^T x = \nabla_f F$  は次のように書ける。

$$\begin{pmatrix} J_{11}^T & J_{12}^T & J_{13}^T & J_{14}^T \\ J_{21}^T & J_{22}^T & J_{23}^T & J_{24}^T \\ J_{31}^T & J_{32}^T & J_{33}^T & J_{34}^T \\ J_{41}^T & J_{42}^T & J_{43}^T & J_{44}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla_{u_1} F \\ \nabla_{u_2} F \\ \nabla_{u_3} F \\ \nabla_{u_4} F \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} 88 \\ (76) \end{matrix}$$

この方程式の 1, 2, 3, 4 番目の区画から、それぞれ 次の方程式を導く

$$(J_{11}^T + \lambda I)x_1^{n+1} = -J_{21}^T x_2^n - J_{31}^T x_3^n - J_{41}^T x_4^n + \lambda x_1^n + \nabla_{u_1} F \quad (77)$$

$$(J_{22}^T + \lambda I)x_2^{n+1} = -J_{12}^T x_1^{n+1} - J_{32}^T x_3^n - J_{42}^T x_4^n + \lambda x_2^n + \nabla_{u_2} F \quad (78)$$

$$(J_{33}^T + \lambda I)x_3^{n+1} = -J_{13}^T x_1^{n+1} - J_{23}^T x_2^{n+1} - J_{43}^T x_4^n + \lambda x_3^n + \nabla_{u_3} F \quad (79)$$

$$(J_{44}^T + \lambda I)x_4^{n+1} = -J_{14}^T x_1^{n+1} - J_{24}^T x_2^{n+1} - J_{34}^T x_3^{n+1} + \lambda x_4^n + \nabla_{u_4} F \quad (80)$$

ここで、 $I$  は単位行列、 $\lambda$  は定数である。そして、方程式 (76) を以下の方法で解く。  
1. 初期値  $x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0$  を適当に選ぶ。

2.  $n = 0, 1, \dots$  に対して  $x_1^{n+1}, x_2^{n+1}, x_3^{n+1}, x_4^{n+1}$  が収束するまで次の手順を繰り返す。但し、共役残差法を使用する。

(a) 方程式(77)から  $x_1^{n+1}$  を求める。

(b) 方程式(78)から  $x_2^{n+1}$  を求める。

(c) 方程式(79)から  $x_3^{n+1}$  を求める。

(d) 方程式(80)から  $x_4^{n+1}$  を求める。

図2には、上記の原理に基づいてターボ機械の翼形状を設計する回路構成が示されてる。また、図3には、図2中の、陰関数定理を利用した勾配計算の回路構成が図3により細かく示されている。図3を参照して勾配計算について説明する。まず、係数演算部8において式(11)と式(12)にしたがって目的関数  $F$  の流体変数  $x_f$  についての勾配(格子座標を固定)  $\nabla_f F$  と設計変数  $x_D$  についての勾配(流体変数を固定)  $h$  を計算し、式(75)と式(74)にしたがって残差  $R$  の設計変数  $x_D$  についてのヤコビ行列  $J_D$  と流体変数  $x_f$  についてのヤコビ行列  $J_f$  を計算する。つぎに、連立1次方程式演算部9において連立1次方程式

$$J_f^T x = \nabla_f F$$

を解く。そして、その解を使って目的関数勾配演算部10において目的関数  $F$  の設計変数  $x_D$  についての勾配

$$g = \nabla_D F(x_D) = h - J_D^T x$$

を求める。目的関数の勾配が求まれば、従来知られてい

る最適化演算部6において従来知られている数値的最適化手法、例えば逐次2次計画法を用いて翼形状を改良される方向と量を計算し、これに基づいて翼形状を改良する。以上の操作を目的関数が最小値となるまで、あるいは設計仕様を満足するまで繰り返すことで最適化された翼形状が得られる。本発明においては、最適化演算部6における数値的最適化手法は限定されるものではなく、共役勾配法や最急降下法であっても、あるいはその他の方法であっても良い。以上、最適化の手順について説明してきたが、このような設計手法において重要な問題に目的関数の選定がある。目的関数は、翼列の設計が改善されているかを判定する根拠として選定されるが、本実施例においては、第一に与えられた設計条件を満足しているか、第二に損失が低減されているかどうかを評価する。本発明によれば、圧縮性・粘性流体方程式に基づいて目的関数を評価することができるため、これは極めて容易となる。すなわち、第一の翼列が設計仕様を満足しているか否かの判定には翼から流出する流れの角度を導入することができる。圧縮性・粘性流体方程式の結果を

用いているので、その結果は実際の翼列の流れ角度を極めて正確に予測することができるとともに、結果について余計な補正や別の手段を導入する必要がない。翼列下流における分布を直接用いるのではなく、請求項6の発明により、翼列下流における流れ角度の翼間方向の平均値を用いることで、目的関数を簡単化することができ、本発明の効果が一層顕著となる。このとき、通常は翼列への流れの流入角度が設計仕様および解析条件として与えられているから、翼列の下流における流れ角度が実際の流れの転向角度を評価することと同様の意味を持つ。また、第二の、損失が低減されているか否かについても請求項7の発明により、翼列下流における損失の翼間方向の平均値を用いることで、目的関数を簡単化することができ、本発明の効果が一層顕著となる。さらに、実用的には与えられた条件の中を満足していることと、損失が低減されていることを同時に評価する必要が生じるが、この場合には請求項13の発明により、両者を線形に結合して用いることで目的関数を簡単化することができ、本発明の効果が一層顕著となる。なお、上記目的関数の選定の説明は、平均操作についてその方法を限定するものではない。また、損失についても、全圧損失係数を用いることが最も好ましい例ではあるが、全圧の変化を直接用いても良いし、効率やエネルギー損失などを用いることも本発明の好ましい実施の形態であって、これらについて特に限定するものでないことは明らかである。さらに、本実施例においては、設計仕様を満足させつつ最適化を実施するために、請求項15の発明により、制約条件として翼の最大厚さを導入する。翼厚さを薄くすることで、おなじ仕事をしながら損失を低減することが可能な場合があるが、実際には翼の厚さには構造あるいは振動に対して十分な強度を確保するための下限が存在する。したがってここでは翼厚さがこの下限値を下回らないように制限を加える。本発明においては制約条件の選択が問題であって、最適化の過程に制約条件を加味する方法については限定しない。この方法については、すでに知られている最適化手法を利用することが可能であり、たとえば、制限値を越えた場合にペナルティを与える方法などが適用可能である。本実施の形態によれば、陰関数定理から導出した圧縮性粘性流体方程式と同次元の連立1次元方程式を一回だけ解くことにより、多数の設計変数に対する目的関数の勾配を同時に求めることが可能であり、従来方法に比して目的関数の勾配計算のCPU時間を設計変数の個数に反比例して短縮できる。たとえば設計変数の個数が10個ならば勾配計算のCPU時間を10分の1に、設計変数の個数が100個

ならば100分の1に短縮できる。このため、従来手法では多大な計算時間とコストを要するために困難であった圧縮性・粘性流体方程式を用いて、多変数によって定義された翼型を最適化することが可能となり、高性能な翼型を提供することができる。なお、本実施の形態は、本発明の最も好適な一例について説明したものであって、これによって目的関数の計算方法、翼形状の定義方法および目的関数の選択について限定されるものではない。

（第2の実施の形態）（請求項4対応）図5には本発明の第2の実施の形態のターボ機械の翼形状の定義方法が示されている。実施の形態1では、翼形状は任意の定義点と、スプライン補間によって定義されていたが、本実施例では、定義点11をキャンバ線13の形状と翼厚さ14の分布によって定義する。本実施例の形態によれば、実質的に構造的制約からの設計上の条件となる最大翼厚さについての制限を容易に導入することができる。発明の効果

本発明によれば、陰関数定理から導出した圧縮性粘性流体方程式と同次元の連立1次元方程式を一回だけ解くことにより、多数の設計変数に対する目的関数の勾配を同時に求めることが可能であり、従来方法に比して目的関数の勾配計算のCPU時間を設計変数の個数に反比例して短縮できる。たとえば設計変数の個数が10個ならば勾配計算のCPU時間を10分の1に、設計変数の個数が100個ならば100分の1に短縮できる。このため、圧縮性・粘性流体方程式を用いて翼列の性能や特性を直接的に評価しながら、多変数によって定義された自由度の高い翼型を実用的な時間とコストで最適化することができる。また、この結果、系統的な実験結果に依存する従来の設計手法では困難であった高性能な翼型を、実用的な時間とコストで提供することが可能となる。

#### 【図面の簡単な説明】

【第1図】本発明の第1の実施の形態の翼形状の設計手法の特徴を説明する図。

【第2図】本発明の第1の実施の形態の翼形状の設計手法の回路構成図。

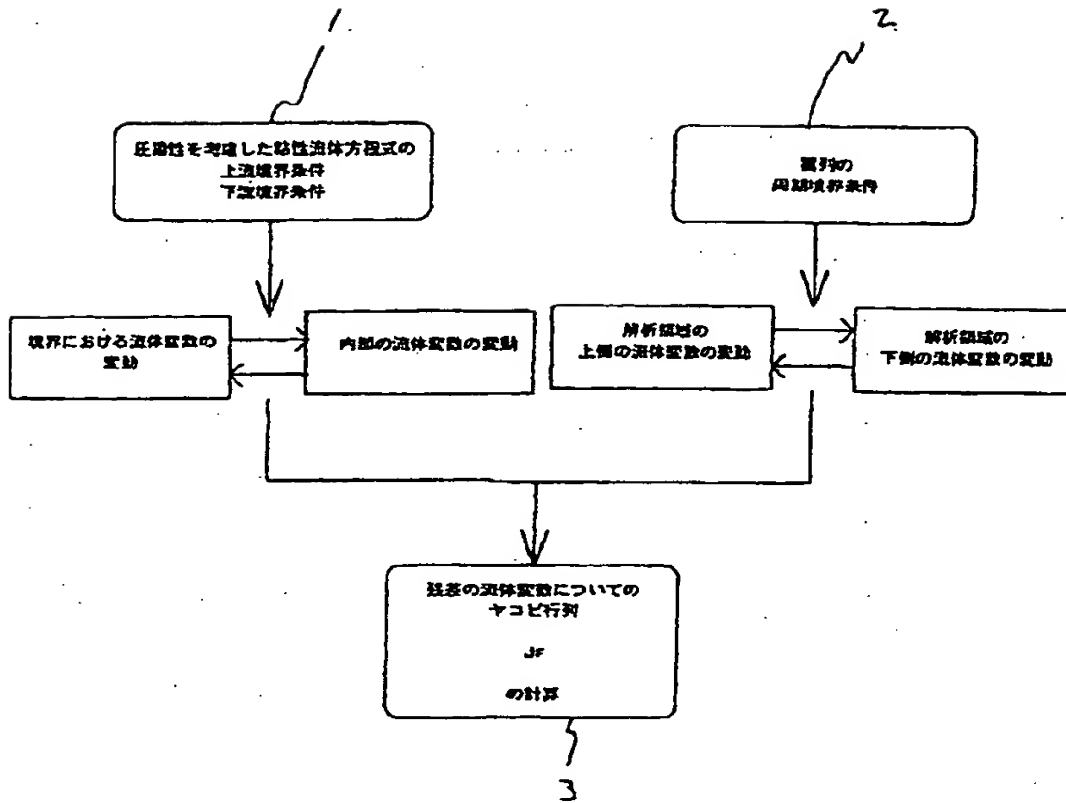
【第3図】陰関数定理を利用した勾配計算の回路構成図。

【第4図】データ点をスプライン補間して定義した翼形状の図。

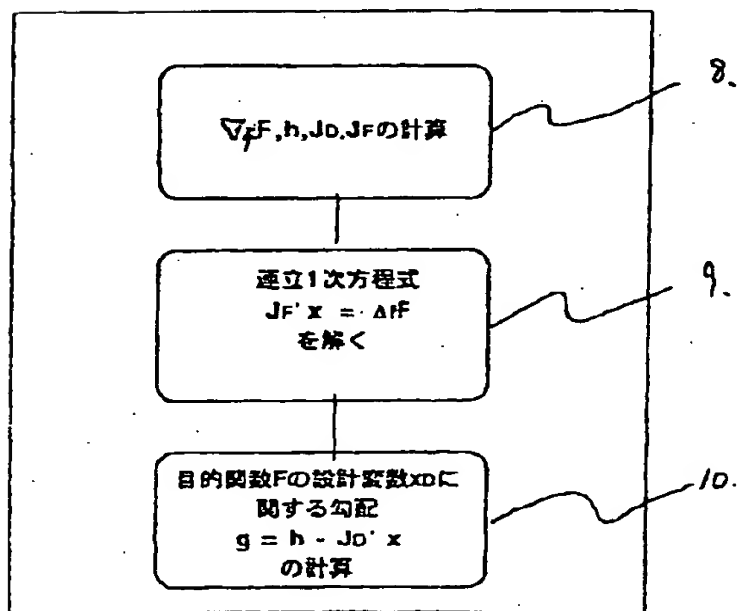
【第5図】本発明の第2の実施の形態の翼形状定義方法を説明した図。

【第6図】従来技術により翼形状を設計する回路構成図。

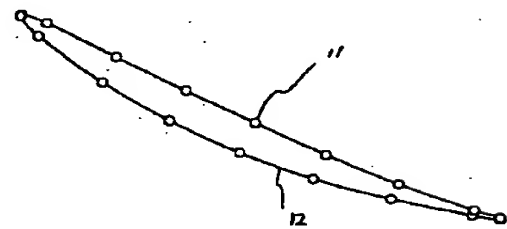
【図1】



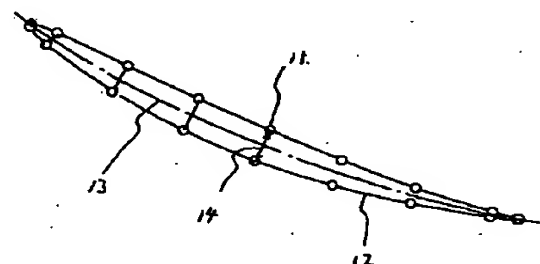
【図3】



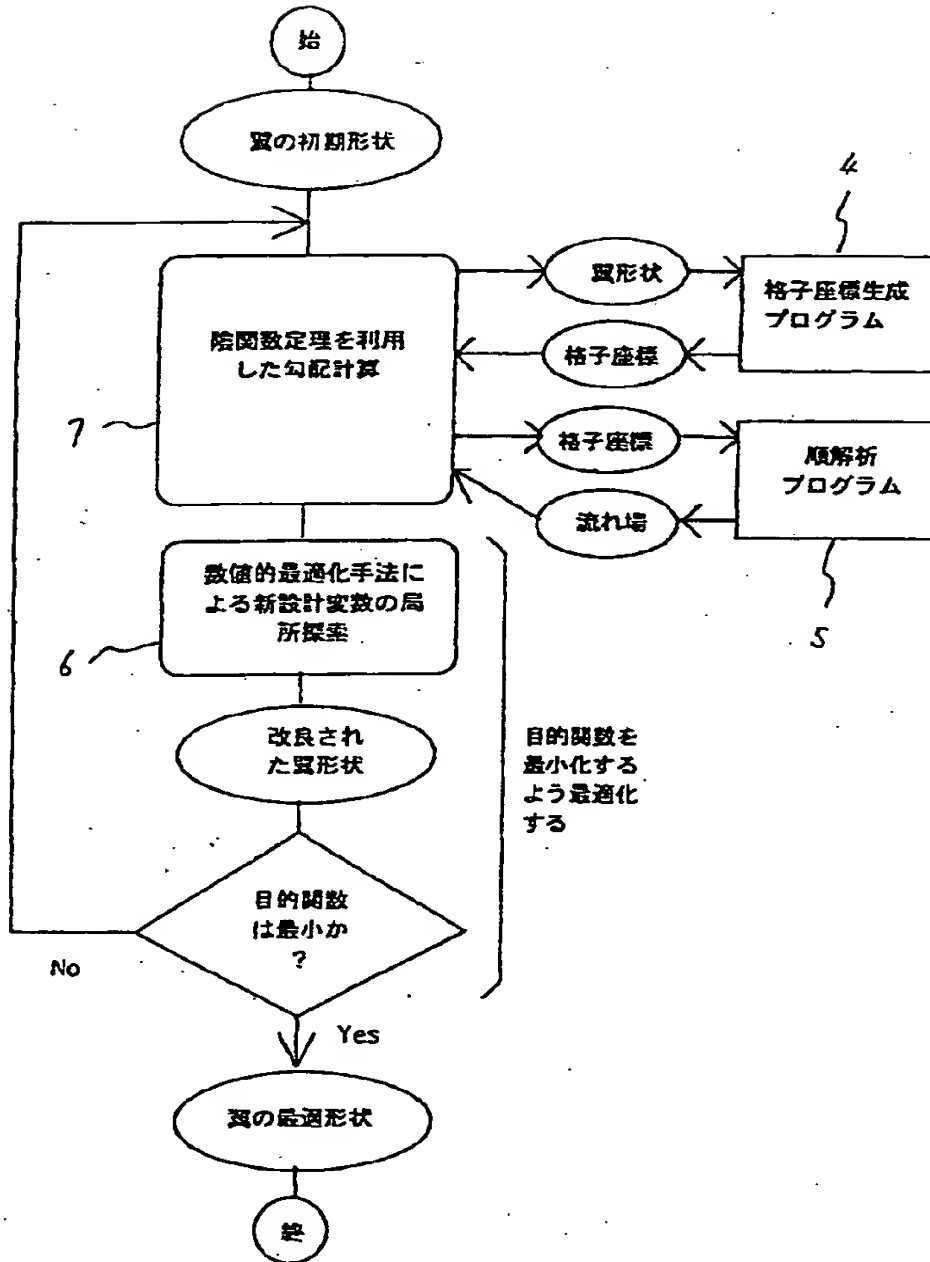
【図4】



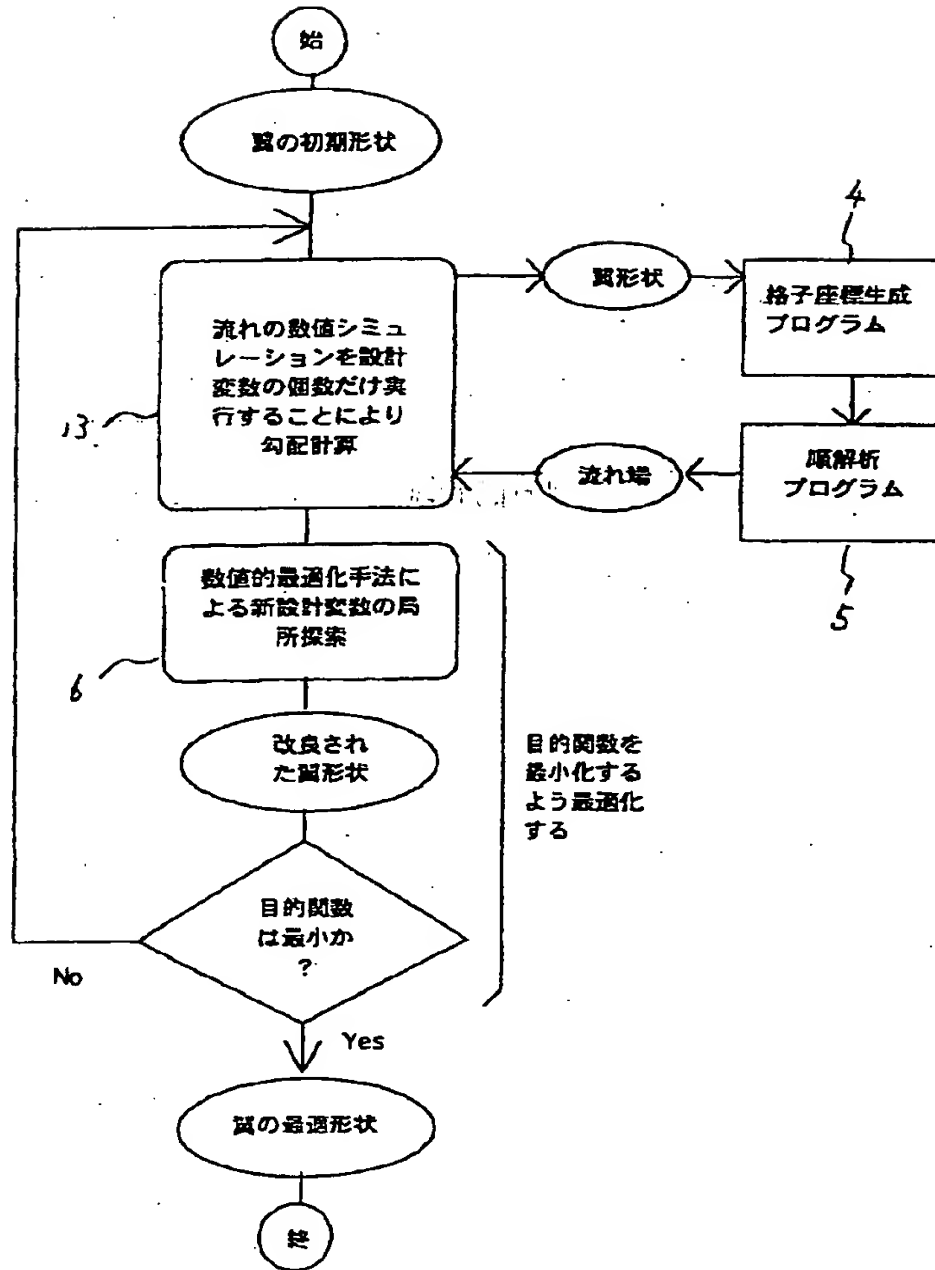
【図5】



【図2】



【図6】



**THIS PAGE BLANK (USPTO)**